



EXAMEN

- P1.** a) (3,0 pto.) Si $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, calcule

$$\int_0^1 (x-1)^2 f'''(x) dx.$$

Indicación: No calcule $f'''(x)$.

- b) Sea f la función definida por

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}}.$$

b1) (1,5 pto.) Demuestre que f es una función impar. Calcule $f'(x)$.

b2) (1,5 pto.) Estudie los intervalos donde f crece y decrece e indique puntos de máximos y mínimos de f .

- P2.** a) Se desea probar que si $\alpha > 0$, entonces $[e^x > x^\alpha, x > 0 \Leftrightarrow \alpha < e]$. Para ello:

(i) (0,5 pto.) Demuestre directamente la implicancia hacia la derecha (\Rightarrow).

(ii) (1,3 pto.) Para demostrar la recíproca considere la función $g(x) = \frac{e^x}{x^\alpha}$, para $x > 0$, y pruebe que g alcanza su mínimo en $x = \alpha$.

(iii) (1,2 pto.) Estudie el mínimo global de g y concluya.

- b) (3,0 pto.) Sea $P(a, b)$ un punto del primer cuadrante sobre la curva C de ecuación $xy = x - y$. Considere las regiones R_1 limitada por C , el eje X y la recta $x = a$, y R_2 limitada por C , el eje Y y la recta $y = b$. Pruebe que el volumen del sólido que se obtiene al rotar R_1 en torno al eje X es igual al volumen del sólido que se obtiene al rotar R_2 en torno al eje Y .

- P3.** a) (1,5 pto.) Estudie la convergencia de

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Indicación: Estudie la convergencia absoluta.

- b) (1,5 pto.) Determine para que valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$$

converge.

- c) El desarrollo en serie para cierta función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}.$$

(i) (1,0 pto.) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie (analice los extremos).

(ii) (0,7 pto.) Determine la serie que representa $f'(x)$ y preséntela como función conocida (serie geométrica).

(iii) (0,8 pto.) Determine, por integración, $f(x)$, calculando el valor de la constante de integración usando un valor adecuado de x .

(iv) (0,5 pto.) Aproveche (iii) para calcular el valor de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Justifique cada uno de sus pasos

Tiempo: 3:00

Pauta Problema 1

a) $f(x) = \ln(x^2+1)$ Calcular $\int_0^1 (x-1)^2 f'''(x) dx$ Integrando por partes

$$u = (x-1)^2 \Rightarrow du = 2(x-1) \quad \text{Así } \int_0^1 (x-1)^2 f'''(x) dx = (x-1)^2 f''(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 (x-1) f''(x) dx$$

$$dv = f'''(x) dx \Rightarrow v = f''(x)$$

⑩ nuevamente por partes $u = (x-1) \rightarrow du = dx$
 $dv = f''(x) dx \rightarrow v = f'(x)$

Entonces $\int_0^1 (x-1)^2 f'''(x) dx = (x-1)^2 f''(x) \Big|_0^1 - 2 \left[(x-1) f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx \right]$

$$= -f''(0) - 2f'(0) + 2f'(1) = -f''(0) - 2f'(0) + 2f(1) - 2f(0)$$

⑩ Ahora $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ \sim $f''(x) = 2 \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2 \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

sigue que $f(0) = \ln(1) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$ \sim $f(1) = \ln(2)$

⑩ Entonces $\int_0^1 (x-1)^2 f'''(x) dx = -2 - 2 \cdot 0 + 2\ln(2) - 2 \cdot 0 = -2 + 2\ln 2$

b) (b1) $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+2}}$; $f(t(x)) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+2}}$ en $-u = t$, $-du = dt$

⑦ $\Rightarrow f(t(x)) = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{u^4+u^2+2}} = - \int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2+2}} = -f(x) \Rightarrow \begin{cases} f \text{ es función} \\ \text{IMPAR.} \end{cases}$

⑧ $f'(x) \stackrel{\text{T.F.C.}}{=} \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+2}} = \frac{2\sqrt{x^4+x^2+2} - \sqrt{16x^4+4x^2+2}}{\sqrt{\cdot} \cdot \sqrt{\cdot}}$

(b2) $f'(x) = \frac{4(x^4+x^2+2) - (16x^4+4x^2+2)}{\sqrt{\cdot} \cdot \sqrt{2\sqrt{x^4+x^2+2} + \sqrt{16x^4+4x^2+2}}} = \frac{6-12x^4}{\sqrt{\cdot} \cdot \sqrt{2\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}}} = 6 \frac{1-2x^4}{\sqrt{\cdot} \cdot \sqrt{2\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}}}$

⑤ también $f'(x) = 6 \frac{(1+\sqrt{2}x^2)(1-\sqrt{2}x^2)}{\sqrt{\cdot} \cdot \sqrt{2\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}}}$ y $f'(x) = 0$ si $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Entonces si $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, $f'(x) < 0$ y f es decreciente.

⑤ y si $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $f'(x) > 0$ y f es creciente.

⑤ de donde $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ es pto de min. Local y $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ es pto de max. Local

Punto Problema 2

a) Si $\alpha > 0$, entonces $[e^\alpha > x^\alpha, x > 0 \Leftrightarrow \alpha < e]$

i) $(\Rightarrow) \forall \alpha, x > 0 \quad e^\alpha > x^\alpha \xrightarrow{\ln} \ln e^\alpha > \ln x^\alpha \Rightarrow x \ln e > \alpha \ln x$

$\Rightarrow x > \alpha \ln x$ y en particular para $x=e > 0 \Rightarrow e > \alpha \ln e = \alpha$
 $\Rightarrow \alpha < e$

(0.5)

ii) Sea $g(x) = \frac{e^x}{x^\alpha} \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x x^\alpha - \alpha e^x x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}} = \frac{e^x x^{\alpha-1} (x - \alpha)}{x^{2\alpha}}$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{x^{\alpha+1}} (x - \alpha)$. An $g'(x) = 0$ si $x = \alpha$

(0.6)

Además $g'(x) < 0$ si $x \in (0, \alpha)$ y $g'(x) > 0$ si $x \in (\alpha, \infty)$

(0.7) Sigue que $g(x)$ decrece en $(0, \alpha)$ y crece en $(\alpha, \infty) \Rightarrow x = \alpha$ es pto de min absoluto de g .

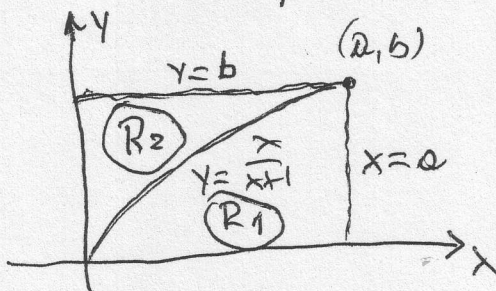
iii) Como $x = \alpha$ es pto. de mínimo global de $g \Rightarrow g(\alpha) \leq g(x), \forall x$

$\Rightarrow \frac{e^\alpha}{\alpha^\alpha} \leq \frac{e^x}{x^\alpha} \Rightarrow e^\alpha \geq \left(\frac{x^\alpha}{\alpha^\alpha}\right)^\alpha > x^\alpha$ pues $\frac{e}{\alpha} > 1$ por hipótesis

(1.2)

Sigue que $\alpha < e \Rightarrow e^\alpha > x^\alpha \quad x > 0$

b)



Primera forma:

$V_{0x} = \pi \int_0^a \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx \wedge V_{0y} = \pi \int_0^b \left(\frac{y}{1-y}\right)^2 dy$

En V_{0x} , sea $t = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t}$

(1.5)

Sigue que $V_{0x} = \pi \int_0^a \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{a}{1+a}} \frac{t^2}{(1-t)^2} dt = \pi \int_a^b \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 dt$

ambos que $V_{0x} = \pi \int_0^a \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 dx = \pi \int_0^b \left(\frac{t}{1-t}\right)^2 dt = V_{0y}$

(1.5)

notar que como $P(a, b) \in C$, $b = \frac{a}{1+a}$.

Segunda forma: (Probablemente la más usada)

calculando como una de las integrales

$$V_{0X} = \pi \int_0^a \frac{x^2}{(1+x)^2} dx = \pi \int_0^a \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^2 dx = \pi \int_0^a \left(1 - \frac{2}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}\right) dx$$

$$= \pi \left[x - 2 \ln(1+x) - \frac{1}{1+x} \right]_0^a = \pi \left(a - 2 \ln(1+a) - \frac{1}{1+a} + 1 \right)$$

(10) $\Rightarrow V_{0X} = \pi \left[a + \frac{a}{1+a} - 2 \ln(1+a) \right]$

$$V_{0Y} = \pi \int_0^b \left(\frac{y}{1-y} \right)^2 dy \quad \text{donde } y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow x(y) = \frac{y}{1-y}$$

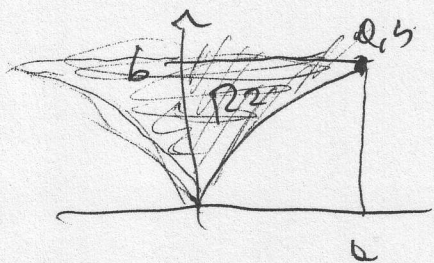
$$= \pi \int_0^b \left(\frac{y-1+1}{1-y} \right)^2 dy = \pi \int_0^b \left(-1 + \frac{1}{1-y} \right)^2 dy = \pi \int_0^b \left[1 - \frac{2}{1-y} + \frac{1}{(1-y)^2} \right] dy$$

$$= \pi \left[y + 2 \ln(1-y) + \frac{1}{1-y} \right]_0^b = \pi \left[b + 2 \ln(1-b) + \frac{1}{1-b} - 1 \right]$$

pero $b = \frac{a}{1+a} \Rightarrow V_{0Y} = \pi \left(\frac{a}{1+a} + 2 \ln\left(\frac{1}{1+a}\right) + \frac{\frac{a}{1+a}}{1 - \frac{a}{1+a}} \right)$

(20) $\Rightarrow V_{0Y} = \pi \left[\frac{a}{1+a} + a - 2 \ln(1+a) \right] = V_{0X}$

OBSERVACION: V_{0Y} también se puede calcular como



$$V_{0Y} = 2\pi \int_0^a x \left(b - \frac{x}{1+x} \right) dx$$

pero es más largo.

Pauta Problema 3

a) Estudiar la convergencia de $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$

La integral es impropia solo de 1^{ra} especie pues el integrando es continuo en $x=0$ con $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \frac{\sin x}{x} = 1$

0.5 \Rightarrow Así $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{Propia}} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx}_I$

Para estudiar I, estudiamos $\int_1^{\infty} |e^{-x} \frac{\sin x}{x}| dx$ donde.

$$|e^{-x} \frac{\sin x}{x}| \leq \frac{e^{-x} |\sin x|}{x} \leq \frac{e^{-x}}{x} \text{ para } x \in (1, \infty)$$

0.5 \Rightarrow Además $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ con $\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{xe^x}$ no negativo y decrece permite usar el criterio de la integral estudiando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ne^n}$ que converge pues $\sqrt[n]{\frac{1}{ne^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} e \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ (Criterio de)

Así la serie converge $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ converge y por lo tanto

0.5 $\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx$ es Absolutamente convergente.

b) Valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{n^{n\alpha}}$

Por el criterio del cociente $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}!}{(n+1)^{(n+1)\alpha}} \cdot \frac{n^{n\alpha}}{\sqrt{n}!} =$

0.5 $\Rightarrow = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} n^{n\alpha}}{(n+1)^\alpha (n+1)^{\alpha n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{1/2 - \alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{\frac{1}{2} - \alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^\alpha$

Segue que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 0 < 1$ si $\alpha > \frac{1}{2}$ $\wedge \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{1}{e}$ si $\alpha = \frac{1}{2}$

1.0 \Rightarrow Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}!}{n^{n\alpha}}$ converge si y solo si $\alpha \geq \frac{1}{2}$

$$c) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$$

i) Encontrar radio e intervalo de convergencia (análisis de extremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(2x)^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|2x|}{\sqrt[n]{n}} = 2|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

0.5) Sigue que $R = \frac{1}{2}$ y el intervalo preliminar $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
 Para $x = -\frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(-\frac{1}{2}))^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ serie alternante tipo

Leibnitz que converge. Para $x = \frac{1}{2} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ armónica que diverge

0.5) Así, $R = \frac{1}{2}$ e $I_C = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ii) Serie para $f'(x)$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{(2x)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$$

0.7) $\Rightarrow f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = 2 \cdot \frac{1}{1-2x}$ (Serie geométrica)

iii) Por integración tenemos $\int f'(x) dx = \int \frac{2}{1-2x} dx$

0.3) $\Rightarrow f(x) = -\ln(1-2x) + C$

Para $x=0$, $f(0) = -\ln(1) + C$ con $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} \Big|_{x=0} = 0$

Así $0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

0.5) Sigue que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-2x}\right)$

iv) Para calcular el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ basta evaluar en (iii) la serie y la función en $x = -\frac{1}{2} \in I_C$

0.5) Así, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-2(-\frac{1}{2})}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$